Návrh víceroměrového LQ regulátoru za neurčitosti podle omezujících podmínek na velikosti signálů.

Miroslav Novák

14. srpna 2007

Obsah

1 Úvod **3**

2 Omezení systému **4**
- 2.1 Regulátor respektující vstupní omezení 4
- 2.2 Hledání vhodných parametrů regulátoru 5
- 2.3 Pravděpodobnostní pohled na vstupní omezení 6

3 LQ–regulátor **8**
- 3.1 Systém 8
  - 3.1.1 MIMO systém 8
- 3.2 Matice vývoje stavu 9
  - 3.2.1 Struktura 9
  - 3.2.2 Rozšířený stav 9
  - 3.2.3 Stavová matice 9
  - 3.2.4 Vývoj systému 11
- 3.3 Regulátor 11
  - 3.3.1 Ztrátová funkce 12
  - 3.3.2 Minimalizace ztrátové funkce 13
  - 3.3.3 Matice v odmocninové formě 14
  - 3.3.4 Ztrátová funkce v odmocninové formě 14
  - 3.3.5 Dynamické programování v odmocninové formě 14
  - 3.3.6 Algoritmus pro výpočet zákona řízení 17
  - 3.3.7 Optimální řízení 18

4 Vstupní omezení **19**
- 4.1 Nezávislá vstupní omezení 19
- 4.2 Dodržení vstupních omezení 20
- 4.3 Vliv vstupních omezení na smyčku systém – regulátor 20
  - 4.3.1 Tvrdá omezení 20
  - 4.3.2 Měkká omezení 20
- 4.4 Tvrdá omezení vstupu vypočteného LQ-regulátorem 20

4.4.1 Jednoduché omezení vstupu 20
4.4.2 Omezení vstupu vycházející z principu LQ regulátoru . 21
4.4.3 Omezení realizované GPC regulátorem 21

5 Parametry regulátoru důležité pro zajištění vyhovujících vstupů 22
5.1 Druhy penalizace v kvadratickém kritériu 22
5.2 Obecná penalizace volbou celé odmocniny kritéria 23
5.3 Penalizace odchylky reference a velikosti přírůstků vstupů v maticové formě 24
5.4 Hodnocení regulátoru za omezujících podmínek 24
5.4.1 Hodnocení výstupů při regulaci s omezovačem 25
5.4.2 Hodnocení vstupů při regulaci bez omezení 26
5.4.3 Hodnocení výstupů při regulaci bez omezení 27
5.5 Pravděpodobnostní hodnocení regulátoru 28

6 Metody optimalizace 29

7 Realizace v Matlabu * 30

8 Simulované pokusy 31
8.1 Spojené nádoby 31

9 Závěr 33

Kapitola 1

Úvod

Teorie řízení je vědní obor zabývající se dynamickými systémy, jejich popisem a možnosti řídit jejich chování. Dynamickým systémem lze nazvat jakoukoliv soustavu s určením jejich vstupů a výstupů, která se vyvíjí v čase. Dynamické systémy mají mnoho podob. Mechanický dynamický systém je například závaží na pružině. Z oblasti elektroniky je to nějaký elektrický obvod na němž měříme určité signály. V chemii to může být probíhající reakce, kde vstupem je teplota reagujících látek a výstupem množství produktu. Ekonomická situace podniku, státu nebo celého světa je dynamický systém. Popsat a pochopit tyto systémy je velmi důležité. O to větší důležitosti nabývá možnost takovéto systémy ovlivňovat tak, aby jejich chování, reprezentováno výstupy systému, sledovalo určitý záměr. Regulátor, který řídí nějaký systém, je sám také dynamický systém, který je spojen s řízeným systémem a na základě jeho stavu nastavuje vstupy za účelem dosažení požadovaných vlastností.

Z hlediska teorie řízení je dynamický systém soustava, jejíž chování je možno popsat diferenciální nebo diferenční rovnicí. Regulátor je také dynamický systém, který se snaží minimalizovat odchylku výstupu regulovaného systému od požadované hodnoty.

Na regulovaný systém jsou však vždy kladena jistá omezení daná vlastnostmi systému. Tato omezení musí regulátor dodržet, pokud má být zachována správná činnost regulovaného systému. Existují jisté metody regulace, které však omezení systému neuvažují. Jak takovéto regulátory vhodným způsobem přimět k respektování omezení systému je tématem této práce.

Kapitola 2

Omezení systému

V této kapitole je popsáno řízení systému s pevnými omezeními vstupu.

Každý systém má jistá omezení, která jsou dána jeho konstrukcí. Každá skutečná soustava je tvořena určitými částmi, které jsou ovlivňovány vstupem a určují hodnotu výstupu.

Omezení na výstupu je určeno maximální a minimální hodnotou, jakou je systém schopen na výstupu dosáhnout. Podobné omezení lze nalézt i u vstupů systému. Systém je schopen užitečně reagovat jen na omezené hodnoty vstupních veličin.

Při překročení těchto omezení dojde k poškození systému. To znamená, že se původní systém změní v systém jiný, takový, který již nepracuje správně. Jistě by bylo možné do původního systému zahrnout i jeho poškození jako vnitřní stav, ale to by nebylo příliš užitečné. Systém se nesmí zničit. Hodnoty každého vstupu i výstupu se mohou pohybovat jen v určitých známých intervalech.

Referenční trajektorie výstupu systému je známá, známé je i omezení výstupu. V případě, že se referenční trajektorie pohybuje mimo omezení, musí být použit jiný systém nebo upravena trajektorie. Toto je jednoduché.

Podstatně složitější situace je s omezením vstupu systému. Problém je v tom jak do regulátoru tato omezení začlenit, tak, aby byla zachována jeho správná činnost. Důležité je také zachovat rozumnou výpočetní náročnost regulátoru, neboť regulátor musí být schopen pracovat v reálném čase.

2.1 Regulátor respektující vstupní omezení

Aby systém nebyl poškozen, regulátor nesmí překročit vstupní omezení regulovaného systému. Je proto nutné výstup regulátoru omezit na povolený rozsah změnou přesahující hodnot na nejbližší povolenou hodnotu. Takto upravený regulátor zaručí splnění vstupních omezení a lze jej v určitých případech použít. Toto řešení má však velkou nevýhodu ve spojení s prediktivními regulátory, které nemají možnost zahrnout vstupní omezení do výpočtu predikce, jako například LQ regulátory.

Funkce prediktivního regulátoru je založena na simulaci systému určitý čas do budoucna, v každém bodě této simulace je známa odchylka vstupu od referenční trajektorie. Regulátor hledá takový průběh vstupů, aby nějaká funkce, závisející mimo jiné i na odchylkách výstupů byla co nejmenší. První takto vypočítaný vstup použije pro řízení.

Prediktivní regulátor, jehož výstup je omezován mimo jeho výpočet, nemůže pracovat správně, protože není schopen toto omezování zahrnout do simulace. A celá predikce je proto chybná.

Také existují prediktivní regulátory, jako například GPC – General Predictive Control, které uvažují omezení již při výpočtu vstupu. To je bezesporu velmi dobrá vlastnost, nicméně mají i řadu nevýhod. Především jsou nelineární, což přináší potíže s analytickými metodami určenými například pro určení stability regulace. Obecně platí, že systém s vstupními omezeními není lineární, a proto ani regulátor, který s těmito omezeními počítá, není lineární. Tento druh regulátorů není rozebírán v tomto textu.

V případě regulátoru, který není na okrajové podmínky stavěný, je nutno tento problém vyřešit jiným způsobem. Je třeba dosáhnout toho, aby vstupy systému setrvávaly v dovolených mezích, ačkoliv se ve výpočtu regulátoru omezující interval explicitně nevyskytuje. Takto nebude nutno vstupy omezovat a funkce regulátoru bude bez chyb. Jde o správné nastavení parametrů regulátoru.

2.2 Hledání vhodných parametrů regulátoru

Určitý druh regulátoru je plně charakterizován svými parametry. Těmi je dána schopnost regulátoru přesně sledovat referenční trajektorii výstupu a také užitá velikost vstupních veličin.

Této vlastnosti lze využít pro snížení rozsahu vstupních veličin regulátoru vhodným nastavením parametrů. Při tom však musí být regulátor stále dostatečně schopný řídit.

Je patrné, že při použití jednoho typu regulátoru je přesnost sledování referenční trajektorie přibližně nepřímo úměrná nárokům na rozsah užitých vstupních hodnot.

Zhoršení funkce regulátoru ve smyslu sledování referenční trajektorie nastane při omezení vstupních hodnot, které nesmějí opustit dovolený interval. To však nastane v každém případě a to buď omezování vstupu bez účasti algoritmu regulátoru, a nebo dojde k omezení již při samém výpočtu. Každá z těchto dvou možností přináší jisté nevýhody. Pokud dojde k omezení vstupů již při výpočtu pomocí vhodného nastavení parametrů, budou zmenšeny také vstupy, které by nepřesáhly omezení a tak se zbytečně zhorší vlastnosti regulace. V případě omezování vstupu je situace mnohem nepřehlednější, protože prediktivní regulátor přestane správně plnit svou funkci predikce. Chování takto špatně predikujícího regulátoru je složité popsat. V této práci je pozornost věnována nastavení parametrů regulátoru tak, aby k porušení omezení nedocházelo vůbec nebo co nejméně.

Hledání vhodných parametrů bude prováděno určitým iteračním způsobem, kdy se v každém kroku ohodnotí míra porušení daných omezení. Cílem iterace bude najít bod v prostoru možných parametrů regulátoru, ve kterém je porušení omezení minimální. Míru porušení lze vyjádřit jako funkci zobrazující parametry regulátoru na číslo. Pokud k porušení během regulace nedojde vůbec bude tato funkce nulová. Se zvětšujícím se nedodržením dovoleného intervalu tato funkce roste. Konkrétní podoba této funkce je libovolná.

2.3 Pravděpodobnostní pohled na vstupní omezení

V případě ideálního deterministického systému je možné dosáhnout toho, aby byla vstupní omezení dodržena vždy. Jinými slovy lze nalézt takové parametry regulátoru, ve se vstupy chovají podle našich požadavků. Toto tvrzení lze zdůvodnit tak, že pokud známe referenční trajektorii výstupu regulátor při nějakém nastavení parametrů použije pro řízení určitou omezenou oblast vstupů. Protože regulátor je deterministický, je průběh regulace vždy stejný a tedy i tato oblast se nemění. Vhodnou změnou parametrů lze docílit menšího rozsahu vstupů tak, že neopouštějí povolený rozsah.

Deterministický systém je však pouhou idealizací skutečnosti. Pokud má model systému odpovídat reálnému světu, ve kterém působí různé neměřitelné poruchy, je nezbytné tyto poruchy do modelu zahrnout. Protože jsou poruchy neměřitelné, není známa jejích hodnota a jediný možný popis je pomocí rozdělení hustoty pravděpodobnosti. To ovšem mění celou situaci a s tím, jak je jedna veličina systému náhodná, jsou náhodné všechny ostatní, které na ní závisí. Regulátor je zpětnovazební a tyto poruchy po jednom kroku ovlivní všechny veličiny regulovaného systému i regulátoru.

Při modelování nedeterministického, jinými slovy stochastického, systému se náhodné poruchy berou jako bílý šum s normálním rozdělením hustoty pravděpodobnosti a s nulovou střední hodnotou. Činnost regulátoru stochastického systému je stejná jako u deterministického, ale místo hodnot veličin se počítá s jejich středními hodnotami.

Pokud by podmínka dodržení vstupních omezení byla pro stochastické systémy formulována podobně, tedy aby střední hodnota překročení omezení vstupů neopustila povolenou oblast, nebylo by to mnoho platné. Podle hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení by hodnota vstupních veličin vyhovovala omezením s pravděpodobností přibližně jedna polovina. Na druhou stranu nelze po regulátoru chtít, aby všechny vstupy vyhověly omezení, to jest, aby pravděpodobnost splnění omezení byla rovna jedné. To je dáno tvarem funkce hustoty pravděpodobnosti normálního rozdělení, která je nenulová na celém oboru reálných čísel. Proto bude splnění vstupních omezení spojeno vždy s určitým číslem udávajícím dovolenou míru nesplnění.

Pokud by byla uvažována jen splnění či nesplnění omezení, byla by touto mírou pravděpodobnost splnění podmínek. Míra nesplnění podmínek je dána hodnotící funkcí, která může hodnotit například i velikost překročení.

Kapitola 3

LQ–regulátor

3.1 Systém

LQ regulátor je určen pro řízení lineárního diskrétního systému. Pro řízení spojitého systému je nutné ho diskretizovat a pro řízení nelineárního systému zase linearizovat.

Obecný diskrétní systém je dán svým vstupem $u(t)$ a výstupem $y(t)$. Vstup a výstup jsou svázány diferenční rovnicí

$$F(y(t), y(t-1), \ldots, y(t-n), u(t), u(t-1), \ldots, u(t-m)) = 0$$

nebo jedná-li se o lineární systém

$$a_n(t)y(t-n) + \ldots + a_0(t)y(t) = b_m(t)u(t-m) + \ldots + b_0(t)u(t)$$

poznámka

V této kapitole je systém definován následujícím způsobem jsou potom písmena a a b s mnoha indexy použita trochu jiným způsobem.

3.1.1 MIMO systém

popsat to pořádně

Simulovaný systém je v `mylq` dán vnějším popisem, to znamená, aktuální výstup $\mathbf{y}$ je určen lineární kombinací minulých výstupů a vstupů a konstanty, čili stavu $\mathbf{x}$, aktuálních vstupů $\mathbf{u}$ a šumu $\mathbf{e}$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{\Theta} \left(\mathbf{u}(t), \mathbf{x}(t), 1\right)^T + \mathbf{e}(t)$$

matice $\mathbf{\Theta}$ určuje tu lineární kombinaci.

To že jde o vnější popis je dáno tím že stav obsahuje pouze minulé vstupy a výstupy, a tudíž jej není nutné složitě rekonstruovat.

3.2 Matice vývoje stavu

3.2.1 Struktura

Pracujeme s vnějším popisem MIMO systému. Jeho struktura nechť je popsána takto:

n_u — počet vstupů (složek vstupu)

n_y — počet výstupů (složek výstupu)

r_u — počet vstupů z různých časových okamžiků, je jich o jednu více než je paměť pro vstup, protože se počítá též aktuální vstup

r_y — počet výstupů z různých časových okamžiků, je rovno velikosti paměť pro výstup

3.2.2 Rozšířený stav

Pro popis systému je použit tzv. rozšířený stav systému, což je stav, vstup a referenční hodnoty veličin v jednom vektoru. Pro ilustraci předpokládejme že je použit systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy s pamětí jeden krok pro vstup a dva kroky pro výstup Za tohoto předpokladu budou mít všechny výše uvedené parametry struktury systému hodnotu dva.

Rozšířený stav systému

$$\mathbf{z} = (\mathbf{u}\ \ \mathbf{x})^T = (\overbrace{u_1^1\ u_1^2}^{\text{vstup}}\ \overbrace{u_2^1\ u_2^2\ \underbrace{y_1^1\ y_1^2}_{\text{výstup}}\ y_2^1\ u_2^2\ 1\ \ \underbrace{u_0^1\ u_0^2\ y_0^1\ y_0^2}_{\text{refer. hodnoty}}}^{\text{stav}})^T \tag{3.1}$$

index nahoře určuje složku veličiny a index dole dobu před jakou byla aktuální, jednička ve vektoru je kvůli vyjádření posunutí výstupních hodnot. Referenční hodnoty veličin se uplatní v kritériu regulátoru jako požadováné hodnoty. Cílem regulace je, aby výstupy sledovaly svou referenční hodnotu, která je v tomto případě konstantní.

3.2.3 Stavová matice

Změnu stavu v jednom časovém kroku vyjadřuje matice vývoje stavu

značit všechny matice buď $\mathbb{P}$ nebo $\mathbf{P}$

$$\mathbb{P} = \begin{array}{cl}
\begin{array}{ccccccccccccc} u_1^1 & u_1^2 & u_2^1 & u_2^2 & y_1^1 & y_1^2 & y_2^1 & y_2^2 & 1 & u_0^1 & u_0^2 & y_0^1 & y_0^2 \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
. & . & . & . & & & & & & & & & \\
. & . & . & . & & & & & & & & & \\
1 & . & . & . & & & & & & & & & \\
. & 1 & . & . & & & & & & & & & \\
{}^1b_1^1 & {}^1b_1^2 & {}^1b_2^1 & {}^1b_2^2 & {}^1a_1^1 & {}^1a_1^2 & {}^1a_2^1 & {}^1a_2^2 & {}^1k & & & & \\
{}^2b_1^1 & {}^2b_1^2 & {}^2b_2^1 & {}^2b_2^2 & {}^2a_1^1 & {}^2a_1^2 & {}^2a_2^1 & {}^2a_2^2 & {}^2k & & & & \\
 & & & & 1 & . & . & . & & & & & \\
 & & & & . & 1 & . & . & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & . & & \\
 & & & & & & & & & . & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & . \\
 & & & & & & & & & & & . & 1
\end{array}\right) &
\begin{array}{l}
\}\, n_u \\ \\ \}\, n_u(r_u-1) \\ \\ \}\, n_y \\ \\ \}\, n_y(r_y-1) \\ \\ \}\, 1 \\ \}\, n_u \\ \\ \}\, n_y \\ \\
\end{array}
\end{array} \tag{3.2}$$

Tečky znamenají nuly.
Pokud uvažujeme nulové vstupy systému, platí $\mathbf{z}(t+1) = \mathbb{P}\,\mathbf{z}(t)$.
Popis bloků matice:

- První dva řádky matice jsou nulové, protože vývoj systému nedává hodnoty vstupu – ty budou doplněny později. (tečky znamenají nuly)

- Blok na druhých dvou řádcích zajišťuje posun historie vstupu.

- Blok na dalších dvou řádcích určuje hodnotu výstupu. Zde je využit vnější popis systému. Jsou to vlastně parametry systému. Celé řádky na nichž blok leží jsou označovány jako $\mathbf{\Theta} \in \mathbf{R}^{n_y,\ n_u(r_u+1)+n_y(r_y+1)+1}$. Matice Θ má prvky připadající referenčním hodnotám (posledních $n_u + n_y$ řádků) nulové, protože ty nejsou částí původního systému, ovlivňují pouze regulaci.

- Blok na čtvrté dvojici řádků posouvá historii výstupu.

- Zbytek matice, posledních pět jedniček na diagonále, zachovávají konstantních pět posledních složek vektoru rozšířeného stavu.

Matice $\mathbb{P}$ je generována funkcí `matp`.

3.2.4 Vývoj systému

Časový vývoj rozšířeného stavu systému lze popsat následující smyčkou

$$\begin{array}{lrcl} 1. & t & = & 1 \qquad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \\ 2. & \mathbf{z}_{(u_1^1\ u_1^2)} & = & (u^1(t)\ u^2(t)) \\ 3. & \mathbf{z} & = & \mathbb{P}\,\mathbf{z} \\ 4. & t & = & t+1 \\ 5. & \text{jdi na 2.} & & \end{array} \tag{3.3}$$

Obsah vektoru **z** se v jednotlivých krocích mění. Pro zvýraznění vývoje stavu vzhledem k času, je zde tabulka, která ukazuje důležitou část stavu po provedení kroku 2. a 3.

$$\begin{array}{c|lll} \mathbf{z} & \text{před kr. 2.} & \text{po kr. 2.} & \text{po kr. 3.} \\ \hline u_1^1 & 0 & u^1(t) & 0 \\ u_1^2 & 0 & u^2(t) & 0 \\ u_2^1 & u^1(t-1) & u^1(t-1) & u^1(t) \\ u_2^2 & u^2(t-1) & u^2(t-1) & u^2(t) \\ y_1^1 & y^1(t-1) & y^1(t-1) & y^1(t) \\ y_1^2 & y^2(t-1) & y^2(t-1) & y^2(t) \\ y_2^1 & y^1(t-2) & y^1(t-2) & y^1(t-1) \\ y_2^2 & y^2(t-2) & y^2(t-2) & y^2(t-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \tag{3.4}$$

tečky na posledním řádku nahrazují nezajímavou část stavu, to jest konstantní jedničku a referenční hodnoty.

Simulace vývoje je ve funkci `simsys`, která navíc řídí systém ve smyslu LQ–regulace. Prakticky je však rychlejší místo násobení maticí $\mathbb{P}$ pouze posouvat stav a aktuální výstup počítat $(y_1^1, y_1^2)^T = \mathbf{\Theta}\,\mathbf{z}$. Matice $\mathbb{P}$ se uplatní především při výpočtu zákona řízeni v LQ–regulaci.

3.3 Regulátor

LQ regulátor patří do rodiny prediktivních regulátorů a jeho činnost je založena na předvídání chování řízeného systému určitý čas do budoucna podle modelu systému, který je v regulátoru obsažen. Je nutné rozlišit aktuální čas t, ve kterém probíhá regulační krok a čas hloubky predikce τ, tj. posunutí vůči aktuálnímu času.

Při predikci, by měly být všechny předvídané veličiny označeny dvěma časy, např $\mathbf{z}(t,\tau)$ je predikovaný stav skutečného stavu $\mathbf{z}(t+\tau)$.

V této sekci bude pro zjednodušení zápisu aktuální čas t z výrazů vynechán a budeme uvádět pouze čas prdikce τ.

3.3.1 Ztrátová funkce

Optimální průběh stavu systému v časovém horizontu optimalizace T je pro LQ–regulátor určen jako minimum aditivní ztrátové funkce

$$L = \sum_{\tau=1}^{T} l(\tau)\ ,$$

kde $l(\tau)$ je ztráta v čase τ. Je to kvadratická forma (rozšířeného) stavu systému

$$l(\tau) = \mathbf{z}(\tau)^T \mathbb{Q}\, \mathbf{z}(\tau)\ .$$

Matice $\mathbb{Q}$ je symetrická pozitivně semidefinitní. Žádané chování regulace je tam, kde je ztráta l nejmenší (nulová).

Příklad kritéria. Chceme, aby výstupy y_1^1 a y_1^2 sledovaly předepsané hodnoty y_0^1 a y_0^2, při tom by však neměly být vstupy systému příliš veliké, tj. neměly by být moc vzdálené hodnotám u_0^1 a u_0^2. Pro takovéto požadavky na regulaci je v čase τ ztráta

$$l(\tau) = q_{u^1}(u_1^1 - u_0^1)^2 + q_{u^2}(u_1^2 - u_0^2)^2 + q_{y^1}(y_1^1 - y_0^1)^2 + q_{y^2}(y_1^2 - y_0^2)^2 \tag{3.5}$$

koeficienty $q_{\bullet\bullet}$ určují váhy důležitosti jednotlivých sčítanců kritéria, jsou to nezáporná reálná čísla.

Matice $\mathbb{Q}$ pro takové kritérium je

$$\mathbb{Q} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccc} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & y_1^1 & y_1^2 & \cdots & u_0^1 & u_0^2 & y_0^1 & y_0^2 \end{array} \\
\begin{array}{c} u_1^1 \\ u_1^2 \\ \vdots \\ y_1^1 \\ y_1^2 \\ \vdots \\ u_0^1 \\ u_0^2 \\ y_0^1 \\ y_0^2 \end{array} &
\begin{pmatrix}
q_{u^1} & \cdots & & & & \cdots & -q_{u^1} & & & \\
\vdots & q_{u^2} & & & & & \vdots & -q_{u^2} & & \\
 & & & & & & & & & \\
 & & & q_{y^1} & & & & & -q_{y^1} & \\
 & & & & q_{y^2} & \cdots & & & \cdots & -q_{y^2} \\
\vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & \\
-q_{u^1} & \cdots & & & & \cdots & q_{u^1} & & & \\
 & -q_{u^2} & & & & & & q_{u^2} & & \\
 & & & -q_{y^1} & \vdots & & & & q_{y^1} & \vdots \\
 & & & & -q_{y^2} & \cdots & & & \cdots & q_{y^2}
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{3.6}$$

Platnost, že $l(\tau) = \mathbf{z}(\tau)^T \mathbb{Q}\, \mathbf{z}(\tau)$ odpovídá $l(\tau)$ z (3.5), lze snadno ověřit.

3.3.2 Minimalizace ztrátové funkce

Vstup je jediné co lze ovlivňovat, proto hledáme minimum kritéria L přes všechny vstupy v časovém horizontu regulace. Funkce $l(\tau)$ je funkcí stavu $\mathbf{z}(\tau)$ a ten závisí na předchozím stavu $\mathbf{z}(\tau-1)$ a aktuálním vstupu $\mathbf{u}(\tau)$.

Na vstupu v čase 1 závisí funkce $l(\tau)$ pro všechna τ. Na vstupu v posledním časovém okamžiku horizontu T závisí pouze funkce $l(T)$. Této vlastnosti využívá *dynamické programování*, kdy se provede nejprve minimalizace posledního sčítance z L, tedy $l(T)$, podle $\mathbf{u}(T)$. Nalezené minimum, označíme $h_{min}(T)$, již nezávisí na $\mathbf{u}(T)$, ale pouze na předchozích vstupech. V dalším kroku se minimalizuje $l(T-1)+h_{min}(T)$ přes $\mathbf{u}(T-1)$. Výsledek označme $h_{min}(T-1)$.

Takto postupně provádíme minimalizaci výrazu. To je možno zapsat rekurentní rovnicí

$$h_{min}(\tau) = \min_{\mathbf{u}(\tau)}(l(\tau)+h_{min}(\tau+1)), \qquad \forall\tau \in \langle 1, T\rangle \tag{3.7}$$

$$h_{min}(T+1) = 0 \tag{3.8}$$

od času T až k počátku.

Hodnota $h_{min}(\tau)$ je minimum

$$h_{min}(\tau) = \min_{\mathbf{u}(\tau),\ \tau\in\{\tau\ldots T\}} \sum_{i=\tau}^{T} l(i)$$

což jest ztráta od času τ do konce horizontu. Funkce $h_{min}(\tau)$ se proto nazývá *optimal cost to go*. $h_{min}(1)$ je minimální ztráta L pro celý horizont regulace.

Hodnoty vstupů vedoucí k optimalitě jsou dány argumentem minima

$$\mathbf{u}_{opt}(\tau) = \arg\min_{\mathbf{u}(\tau)}(l(\tau)+h_{min}(\tau+1)), \qquad \forall\tau \in \langle 1, T\rangle$$

Ukazuje se, že $\mathbf{u}_{opt}$ není vyjádřeno absolutně, ale výrazem

$$\mathbf{u}_{opt}(\tau) = \mathbf{cl}(\tau)\,\mathbf{x}(\tau)\ ,$$

kde $\mathbf{cl}(\tau)$ je tzv. *zákon řízení (control law)*. Pro řízení v každém kroku použijeme pouze $\mathbf{cl}(\tau)$ v čase $\tau=1$, protože $\mathbf{z}(1)$ obsahuje skutečnou, naměřenou hodnotu stavu, nikoliv predikci. !rozmer cl, zak riz je to cl a ne ten soucin

$$\mathbf{u}(1) = \mathbf{cl}(\mathbf{1})\,\mathbf{z}(1)$$

Pokud je $l(\tau)$ nezávislé na kroku regulace, či-li matice $\mathbb{Q}$ je konstantní, je možno zákon řízení $\mathbf{cl}(1)$ vypočítat pouze jednou, protože je konstantní též.

3.3.3 Matice v odmocninové formě

Odmocnina matice A, označme $\sqrt{A}$, pokud existuje, je horní trojúhelníková matice splňující $A = \sqrt{A}^T\sqrt{A}$.

[kdy existuje (PSD)? jednoznačnost?]

[dát sem to tvrzení z důkazu.]

[má se odmocnina definovat jako horní trojůhelníková, nebo je to jedno, protože ji lze na HT vždy upravit násobení OG maticí.

3.3.4 Ztrátová funkce v odmocninové formě

Ztrátovou funkci $l(\tau)$ lze vyjádřit v odmocninové formě

předefinovat odmocninu i na matice

$$\begin{aligned} l(\tau) &= \mathbf{z}(\tau)^T \mathbb{Q}\,\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau)^T \sqrt{\mathbb{Q}}^T \sqrt{\mathbb{Q}}\ \mathbf{z}(\tau) = \\ &= \left(\sqrt{\mathbb{Q}}\ \mathbf{z}(\tau)\right)^T \sqrt{\mathbb{Q}}\ \mathbf{z}(\tau) = \sqrt{l(\tau)}^T \sqrt{l(\tau)} = \|\sqrt{l(\tau)}\|^2 \end{aligned}$$

$$\sqrt{l(\tau)} = \sqrt{\mathbb{Q}}\ \mathbf{z}(\tau) \tag{3.9}$$

Pro ilustraci odmocnina matice $\mathbb{Q}$ z rovnice (3.6) je

$$\sqrt{\mathbb{Q}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} u_1^1 & u_1^2 & \cdots & y_1^1 & y_1^2 & \cdots & u_0^1 & u_0^2 & y_0^1 & y_0^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \sqrt{q_{u^1}} & & & & & & -\sqrt{q_{u^1}} & & & \\ & \sqrt{q_{u^2}} & & & & & & -\sqrt{q_{u^2}} & & \\ & & & \sqrt{q_{y^1}} & & & & & -\sqrt{q_{y^1}} & \\ & & & & \sqrt{q_{y^2}} & & & & & -\sqrt{q_{y^2}} \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.10}$$

3.3.5 Dynamické programování v odmocninové formě

Pro snadnější zápis definujeme $h(\tau)$ jako

$$h(\tau) = l(\tau) + h_{min}(\tau + 1)$$

Minimalizujeme stejný výraz jako (3.7), ale v odmocninové formě, tedy

$$\|\sqrt{h_{min}(\tau)}\| = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \|\sqrt{l(\tau) + h_{min}(\tau+1)}\| = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \|\sqrt{h(\tau)}\|, \qquad \forall\tau \in \langle 1, T\rangle \tag{3.11}$$

Nyní dokážeme, že výraz $\sqrt{h(\tau)}$ lze vyjádřit

$$\sqrt{h(\tau)} = \mathbf{H}(\tau)\mathbf{z}(\tau), \qquad \forall\tau \in \langle 1, T\rangle \tag{3.12}$$

kde $\mathbf{H}$ je jistá horním trojúhelníková odmocnina a že optimální řízení je tvaru

$$\mathbf{u}_{opt}(\tau) = \mathbf{cl}(\tau)\,\mathbf{x}(\tau), \qquad \forall \tau \in \langle 1, T \rangle \tag{3.13}$$

kde $\mathbf{cl}(\tau)$ je matice příslušných rozměrů.

- Pro $\tau = T+1$ je $h(T+1) = 0$, protože jsme na konci simulace a stav za horizontem nemá na optimalitu žádný vliv. Platí tedy

  $$\sqrt{h(T)} = \sqrt{l(T) + h_{min}(T+1)} = \sqrt{l(T)} = \sqrt{\mathbb{Q}}\ \mathbf{z}(T)$$

  čili $\mathbf{H}(T) = \sqrt{\mathbb{Q}}$.

- Nechť pro jisté τ platí

  $$\sqrt{h(\tau)} = \mathbf{H}(\tau)\mathbf{z}(\tau) \tag{3.14}$$

  kde $\mathbf{H}(\tau)$ je odmocnina v horním trojúhelníkovém tvaru. Dokážeme, že pak platí

  $$\sqrt{h(\tau-1)} = \mathbf{H}(\tau-1)\mathbf{z}(\tau-1) \tag{3.15}$$

  Podle (3.11) a indukčního předpokladu (3.14) je

  $$\|\sqrt{h_{min}(\tau)}\| = \min_{\mathbf{u}(\tau)} \|\mathbf{H}(\tau)\mathbf{z}(\tau)\| \tag{3.16}$$

  Přepíšeme součin na pravé straně v normě do blokového tvaru

  $$\mathbf{H}(\tau)\mathbf{z}(\tau) = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{H}_{uu} & \multicolumn{2}{c}{\mathbf{H}_{ux}} \\ \hline & & \\ & 0 & \mathbf{H}_{xx} \\ & 0 & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u}(\tau) \\ \hline \mathbf{x}(\tau) \end{array} \right) \tag{3.17}$$

  Hledáme minimum normy tohoto součinu vzhledem k $\mathbf{u}(\tau)$, na $\mathbf{u}(\tau)$ závisí pouze prvních n_u složek součinu, neboť matice $\mathbf{H}$ je horní trojúhelníková. Pro dosažení minima volíme takové $\mathbf{u}(\tau)$, aby tyto první složky byly minimální. Pokud nejsou žádné další požadavky na vstup, lze dosáhnout toho, že jsou nulové.

  $$\mathbf{H}_{uu}\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{H}_{ux}\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{0} \tag{3.18}$$

  Optimální řízení potom je

  $$\mathbf{u}(\tau) = -\mathbf{H}_{uu}^{-1}\mathbf{H}_{ux}\mathbf{x}(\tau)$$

Tak jsme získali zákon řízení

$$\mathbf{u}_{opt}(\tau) = \mathbf{cl}(\tau)\,\mathbf{x}(\tau) \tag{3.19}$$

kde

$$\mathbf{cl}(\tau) = -\mathbf{H}_{uu}(\tau)^{-1}\mathbf{H}_{ux}(\tau)$$

a dokázali tak (3.13) pro jedno τ, pro všechna τ bude dokázáno až po ukončení indukce.

Protože vždy budeme volit $\mathbf{u}(\tau)$ optimální, nebude již součin (3.17) záviset na $\mathbf{u}(\tau)$ a prvních n_u složek součinu bude vždy nulových. Hodnota normy se nezmění pokud tyto první nulové složky úplně vypustíme. To lze provést vypuštěním bloků $\mathbf{H}uu$ a $\mathbf{H}ux$ z matice $\mathbf{H}$ a zbyde jen matice z bloku nul a bloku $\mathbf{H}xx$, označíme ji $\tilde{\mathbf{H}}$. Minimální odmocnina funkce $h(\tau)$ je potom

$$\sqrt{h_{min}(\tau)} = \tilde{\mathbf{H}}(\tau)\mathbf{z}(\tau)$$

Podle konstrukce matice $\tilde{\mathbf{H}}$ připadnou při násobení vstupům jen nuly a výsledek na aktuálním vstupu tedy nezávisí.

Násobení stavu $\mathbf{z}(\tau)$ maticí $\mathbb{P}$ dostaneme stav $\mathbf{z}(\tau{+}1)$ ovšem bez vstupu, který samozřejmě není důsledkem, ale přichází zvenku.

$$\mathbb{P}\mathbf{z}(\tau) = \mathbb{P}\begin{pmatrix}\mathbf{u}(\tau)\\ \mathbf{x}(\tau)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{x}(\tau+1)\end{pmatrix}$$

Vstup je formálně nastaven na nulu, což však při násobení maticí $\tilde{\mathbf{H}}$ nevadí. Proto platí

$$\sqrt{h_{min}(\tau)} = \tilde{\mathbf{H}}(\tau)\mathbf{z}(\tau) = \tilde{\mathbf{H}}(\tau)\mathbb{P}\mathbf{z}(\tau-1) \tag{3.20}$$

Tvrzení:
Nechť $A = F^TF$, $B = G^TG$ a $C = H^TH$ jsou odmocniny, pak z definice maticového násobení plyne

$$C = A + B = H^TH = \begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix}$$

a tedy

$$H = \begin{pmatrix}F\\ G\end{pmatrix}$$

Z tohoto tvrzení, z (3.20) a z (3.9) plyne

$$\sqrt{h(\tau-1)} = \sqrt{l(\tau-1)+h_{min}(\tau)} = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{min}(\tau)} \\ \sqrt{l(\tau-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\tau)\mathbb{P} \\ \sqrt{\mathbb{Q}} \end{pmatrix} \mathbf{z}(\tau-1) \tag{3.21}$$

Označíme

$$\mathbf{H}'(\tau-1) := \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\tau)\mathbb{P} \\ \sqrt{\mathbb{Q}} \end{pmatrix} \tag{3.22}$$

matice $\mathbf{H}'(\tau-1)$ však nemusí být horní trojúhelníková. Horní trojúhelníkovou matici $\mathbf{H}(\tau-1)$ stejných vlastností získáme vynásobením vhodnou ortogonální maticí $\mathbf{T}$

$$\mathbf{H}(\tau-1) = \mathbf{T}\mathbf{H}'(\tau-1) \tag{3.23}$$

tak změníme pouze odmocninu, ale neodmocněný tvar se nezmění, protože

$$\mathbf{H}'^T\mathbf{H}' = \mathbf{H}'^T \overbrace{\mathbf{T}^T\mathbf{T}}^{\mathbf{I}} \mathbf{H}' = (\mathbf{T}\mathbf{H}')^T(\mathbf{T}\mathbf{H}')$$

Pro nalezení ortogonální matice $\mathbf{T}$ lze použít QR-algoritmus.

Z (3.22) a (3.23) dostaneme přesně rovnici (3.15)

$$\sqrt{h(\tau-1)} = \mathbf{H}(\tau-1)\mathbf{z}(\tau-1)$$

kterou jsme chtěli dokázat.

Uzavřením indukce také víme, že zákon řízení (3.13) platí pro celý horizont regulace.

3.3.6 Algoritmus pro výpočet zákona řízení

Konstrukce důkazu v předchozí sekci dává algoritmus pro výpočet zákona řízení $\mathbf{cl}(1)$

$$\begin{array}{rrcl}
1. & \tau & = & T\,, \quad \mathbf{H} = \sqrt{\mathbb{Q}} \text{ horní trojúhelníková} \\
2. & \mathbf{H} & = & \mathbf{H} \text{ bez bloků } \mathbf{H}_{uu} \text{ a } \mathbf{H}_{ux} \\
3. & \mathbf{H} & = & \mathbf{H}\mathbb{P} \\
4. & \mathbf{H} & = & \binom{\mathbf{H}}{\sqrt{\mathbb{Q}}} \\
5. & \mathbf{H} & = & \mathbf{TH}\text{ , kde } \mathbf{T} \text{ je ortog. a taková, že levá strana je hor. troj.} \\
6. & \tau & = & \tau - 1 \\
7. & & & \text{pokud } \tau > 0\text{, jdi na 2.} \\
6. & \mathbf{cl} & = & \mathbf{H}_{uu}^{-1}\mathbf{H}_{ux}
\end{array} \tag{3.24}$$

Krok 5. je realizován QR-rozkladem matice $\mathbf{H}$ na součin ortogonální a horní trojúhelníkové matice

$$\mathbf{T}^T\mathbf{H} := \mathbf{H}$$

Pro zvýšení stability výpočtu je vhodné v 1. kroku volit

$$\mathbf{H} = \alpha\mathbf{I}$$

kde α je dostatečně velké číslo. napsat proč

3.3.7 Optimální řízení

Algoritmus (3.24) vypočítá zákon řízení $\mathbf{cl}(1)$. Výpočet predikce probíhal v čase t, proto lze $\mathbf{cl}(1)$ označit $\mathbf{cl}(t,1)$ podle úmluvy ze sekce 3.3. Funkce $\mathbf{cl}(t,1)$ nezávisí na stavu, ale jen na matici $\mathbb{Q}$, která nezávisí na čase. Pro řízení je potřeba pouze $\mathbf{cl}(t,\tau)$ pro $\tau = 1$. Z těchto důvodů budeme označovat $\mathbf{cl}(t,1) = \mathbf{cl}$. A tedy optimální vstup ve smyslu LQ-regulace je

$$\mathbf{u}_{opt}(t) = \mathbf{cl}\,\mathbf{x}(t)$$

Matici $\mathbf{cl}$ je možno vypočítat pouze jednou pro dané $\mathbb{Q}$.

Kapitola 4

Vstupní omezení

Velikost vstupní veličiny je u skutečného systému téměř vždy omezena. Toto omezení vyjádříme množinou $\mathcal{U}$, ve které musí ležet hodnota vstupu

$$\mathbf{u} \in \mathcal{U} \subset R^{n_u}$$

Obrázek 2D omezující množiny – nějaká brambora

4.1 Nezávislá vstupní omezení

Obrázek 2D omezující množiny nezávislé – obdélník

Množina $\mathcal{U}$ může vypadat různě. Pokud však jsou omezení jednotlivých složek vstupů navzájem nezávislá a omezení jedné složky nezávisí na hodnotě jiných složek

$$u^i \in \langle u^i_{min}, u^i_{max} \rangle, \quad \text{pro } i = 1, \cdots, n_u$$

množina možných vstupů $\mathcal{U}$ je potom kartézským součinem těchto intervalů

$$\mathcal{U} = \prod_{i=1}^{n_u} \langle u^i_{min}, u^i_{max} \rangle \tag{4.1}$$

a tvoří n_u-rozměrný kvádr. Vlastnost $u \in \mathcal{U}$, je možno napsat jako

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u} \leq \mathbf{u}_{max}$$

Při konstrukci smyčky regulátor—systém, je třeba zajistit, aby do řízeného systému byl přiváděn vstup ležící v množině $\mathcal{U}$. Je několik možností jak toho dosáhnout

4.2 Dodržení vstupních omezení

a) **tvrdá omezení**
vstup navrhovaný regulátorem jistým způsobem omezit tak, aby náležel do $\mathcal{U}$

b) **měkká omezení**
nastavit regulátor a jeho parametry tak, aby k porušení omezení nedocházelo

c) kombinace předchozích dvou, tj. nastavit regulátor tak, aby k porušení docházelo co nejméně, a pak vstupy ještě dodatečně omezovat

4.3 Vliv vstupních omezení na smyčku systém – regulátor

4.3.1 Tvrdá omezení

Tvrdé omezující podmínky na vstupy způsobí, že výsledný systém již není lineární a výpočet je podstatně složitější. Prediktivní regulátory, které jsou na omezující podmínky přímo stavěny se nazývají GPC–regulátory a jsou založeny na metodě kvadratického programování. Tyto regulátory však svou nelinearitou přináší potíže při určování jejich asymptotických vlastností a stability.

4.3.2 Měkká omezení

Měkká omezení jsou realizována pouhou změnou parametrů regulátoru. Regulovaný systém neztratí na linearitě. Nevýhodou je ovšem celkové utlumení vstupů i tam, kde to není vzhledem ke vstupním omezením nutné. Výsledkem je horší regulace ve smyslu požadovaných hodnot výstupu.

4.4 Tvrdá omezení vstupu vypočteného LQ-regulátorem

4.4.1 Jednoduché omezení vstupu

Uvažujme případ, kdy LQ-regulátor navrhuje vstup, který neodpovídá omezením. Vstup je ze zákona řízení dán

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{cl}\,\mathbf{x}$$

vstup je označen vlnkou, protože opravdový vstup, bez vlnky, bude omezen.

Nejjednodušší omezení je, aby skutečný vstup byl co možná nejblíže vstupu ze zákona řízení

$$u = \arg\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|$$

Pokud je omezující množina $\mathcal{U}$ jen n_u-rozměrný kvádr (4.1), stačí omezit pouze jednotlivé složky $\mathbf{u}$ na nejbližší bod příslušného intervalu $\langle u^i_{min}, u^i_{max}\rangle$.

Toto je jistě přirozená volba omezení skutečného vstupu, pokud známe pouze vstup daný regulátorem.

4.4.2 Omezení vstupu vycházející z principu LQ regulátoru

Obrázek, jak se omezuje klasicky a jak přes QP

Při LQ regulaci však můžeme znát víc. Můžeme hledat minimum normy součinu (3.17), což je totéž, jako hledat minimum normy vektoru sestaveného z prvních n_u složek tohoto součinu

$$\mathbf{u} = \arg\min_{\mathbf{u}\in\mathcal{U}} \|\mathbf{H}_{uu}\mathbf{u} + \mathbf{H}_{ux}\mathbf{x}\|^2 \qquad (4.2)$$

kde matice $\mathbf{H}_{uu}$ a $\mathbf{H}_{ux}$ jsou z posledního kroku dynamického programování, kde $\tau = 1$. Při omezeních již nebude vždy možné dosáhnout nuly, tak jako v (3.18).

Minimalizace (4.2) vede na úlohu kvadratického programování

$$\mathbf{u} = \arg\min_{u_{min}\le\mathbf{u}\le\mathbf{u}_{max}} (\mathbf{u}^T\mathbf{H}^T_{uu}\mathbf{H}_{uu}\mathbf{u} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{H}^T_{ux}\mathbf{H}_{uu}\mathbf{u}) \qquad (4.3)$$

V každém kroku regulace musí proběhnout algoritmus kvadratického programování, který je v obecném případě poměrně časově náročný. Počet vstupů systému je však zpravidla nízký, takže doba potřebná pro výpočet je přijatelná.

4.4.3 Omezení realizované GPC regulátorem

GPC regulátor minimalizuje ztrátovou funkci včetně predikce pouze metodou kvadratického programování a vůbec nepoužívá zákon řízení.

Výhodou je, že jsou vstupní omezení dodržována i při predikci.

Nevýhodou značná časová náročnost výpočtu a obtížné určování asymptotických vlastností systému.

Kapitola 5

Parametry regulátoru důležité pro zajištění vyhovujících vstupů

Další možnost jak udržet vstupy povoleném rozsahu, je vhodně nastavit váhy $q_{\bullet\bullet}$ v kritériu (3.5). Pokud nastavíme větší penalizaci vstupů, budou vstupy optimálního řízení menší. Dostatečně velkou hodnotu těchto vah lze docílit splnění vstupních omezení.

Omezení vstupů pouhým zvýšením odpovídajících parametrů v kritériu není naprosto spolehlivé a je nutno ještě vstupy omezovat některým způsobem z kapitoly 4.4. Důvodem je například velká porucha v šumu, regulátor zareaguje řízením úměrným velikosti poruchy. Pokud považujeme šum za normálně rozdělený, nelze předem vyloučit i libovolně velikou poruchu.

Při tomto způsobu dodržení vstupních omezení, jsou tvrdé korekce vstupů na vstupy z kapitoly 4.4 použita jen minimálně, a lze použít znalosti o asymptotickém chování LQ-regulátoru.

Volba velké penalizace vstupů ve ztrátové funkci může převážit penalizaci výstupů a systém pak již přestává být řízen. To je nežádoucí.

V této kapitole je ztrátovou funkcí míněna funkce L, která je použita při výpočtu zákona řízení, tedy před nebo v průběhu regulačního procesu.

5.1 Druhy penalizace v kvadratickém kritériu

V kapitole 3.3.1 je uvedeno kritérium penalizace (3.5), to však není jediná možnost jak může vypadat.

Nyní budou uvedeny různé druhy vah, jejichž lineární kombinaci lze použít jako ztrátovou funkci.

1. penalizace odchylky od referenční hodnoty
   Tato penalizace má tvar $(u_1^\bullet - u_0^\bullet)^2$ pro vstupy a pro vstupy vypadá obdobně. Lze ji považovat za základní váhu, protože vystihuje náš prvořadý cíl – sledovat referenční trajektorie. Je použita v rovnici (3.5).

2. penalizace přírůstků vstupů
   Je tvaru $(u_1^\bullet - u_2^\bullet)^2$ a její úkol je zabránit příliš rychlým změnám mezi jednotlivými kroky regulace. Cílem této penalizace je pomoci při udržování vstupů v povoleném rozsahu. (Možná by mohlo být užitečné použít tuto váhu i na výstupy.)

3. vzájemná penalizace rozdílu dvou různých veličin
   Je tvaru $(u_1^1 - u_1^2)^2$ a v určitých případech MIMO systémů by mohla mít důležitý vliv na udržení vstupů v povoleném rozsahu.

   Pokud je však $u_0^1 \neq u_0^2$, pak tato penalizace bude působit proti penalizaci na dodržování referenční hodnoty, která je více – méně prvořadé důležitosti. Řešením je tato modifikace $((u_1^1 - u_0^1) - (u_1^2 - u_0^2))^2$.

   Penalizace z dvou předchozích bodů jsou ve výsledné ztrátové funkci násobeny nezápornými koeficienty (váhami) $q_\bullet$. V tomto případě je možné koeficient dostat pod mocninu, přitom u každého ze členů rozdílu může být koeficient jiný $(q_\bullet^1(u_1^1 - u_0^1) - q_\bullet^2(u_1^2 - u_0^2))^2$.

4. další možnosti penalizací
   jako je například vzájemná penalizace tří různých veličin, nebo místo penalizace přírůstků, aproximujících první derivaci, penalizovat aproximaci třetí derivace. Možností je více.

5.2 Obecná penalizace volbou celé odmocniny kritéria

Místo zabudovávání jednotlivých druhů penalizací do kritéria jako v předchozí sekci je možné vzít celý trojúhelník odmocniny jako jednu penalizaci, jejíž váhy jsou právě prvky trojúhelníkové odmocniny.

Výhodou tohoto přístupu je, že v takové to penalizaci jsou zastoupeny všechny možné druhy penalizací z předchozí sekce.

Nevýhodou je velké množství parametrů (vah) kritéria. Počet prvků trojúhelníku matice $n \times n$ je $\frac{n(n+1)}{2}$.

Který z těchto dvou přístupů je lepší to zatím nevím.

Výchozí penalizací při tomto postupu volíme tak, aby pouze výstupy sledovaly referenční hodnoty – to je cílem regulace. V dalších iteracích začnou mít vliv penalizace vstupů.

nevím jestli to dokonverguje k nejlepšímu řešení, jestli to třeba nezačne zhoršovat výstupy, i když by existovalo jiné řešení jak zlepšit vstupy, ale asi to bude stejné jako ve způsobu z předchozí kapitoly. Možná bude potom nutné prohledat všechna řešení na nejlepší výstup. To bude ale pracné.

iterace patří až do metod optimalizace toto dát až do popisu metody minimaliace

5.3 Penalizace odchylky reference a velikosti přírůstků vstupů v maticové formě

Obecná penalizace je příliš výpočetně náročná a výsledek nemá jasnou fyzikální interpretaci. Jednotlivé druhy penalizací jsou zas příliš konkrétní.

Určitý kompromis ve volbě penalizace je ztrátová funkce ve tvaru

$$(u_1 - u_0)^T Q_u (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1)^T Q_{du} (u_2 - u_1) + (y_1 - y_0)^T I (y_1 - y_0)$$

kde u_1 je aktuální vektor vstupu, u_0 je referenční hodnota a u_2 je vstup spožděný o jeden krok. Písmeno I označuje jednotkovou matici.

Matice Q_u penalizuje velikost vstupů. Její diagonální prvky určují váhu odchylky vstupu od referenční hodnoty. Mimodiagonální prvky definují váhy křížových penalizací.

Velikost přírůstků vstupní veličiny penalizuje matice Q_{du} diagálními prvky. Obdobně prvky mimo diagonálu penalizují křížové velikosti změn přírůstků hodnot vstupů.

Obě matice Q_u i Q_{du} musí být pozitivně semidefinitní.

Nebo definitní?

Penalizace výstupů je konstantně jednotková matice.

Význam matic Q_u a Q_{du} a jejich diagonálních a mimodiagonálních prvků bude demonstrován na simulovaných systémech.

XXX struktura matice $\mathbb{Q}$ sestavená z bloku Q_u a Q_{du}. XXXX

5.4 Hodnocení regulátoru za omezujících podmínek

Pokud má řízený systém omezení na vstup a je nutno upravit regulátor změnou jeho parametrů. Vybereme takové parametry, aby regulace byla co nejlepší. Vlastnost "nejlepší regulace" definujeme jako minimum jisté ztrátové funkce.

Pro tento účel definujeme ztrátovou funkci V, která bude mít podobný význam jako ztrátová funkce L v sekci 3.3.1. Rozdíl je však v tom, že ztrátová funkce V nebude použita v průběhu regulace, či spíše při prediktivním výpočtu zákona řízení cl jako funkce L. Naopak, funkce V bude hodnotit průběh veličin systému až po provedení simulace.

Funkce L nemůže zastoupit funkci V, protože LQ-regulace je pro L vždy optimální - funkce nemůže hodnotit sama sebe. Dalším důvodem je omezování vstupů, které je aplikováno až na regulátorem navrhovaný vstup a ten o něm tedy "neví".

Ztrátová funkce V je aplikována na výsledný průběh veličin regulace, ten je však dán parametry regulátoru a proto je V funkcí těchto parametrů. Obecně bude mít tvar buďto průměru nebo maxima z jednotlivých ztrát, které závisí na konkrétních časových krocích regulace.

$$V = \frac{\sum_{t=1}^{t=T_{sim}} v(t)}{T_{sim}} \tag{5.1}$$

nebo

$$V = \max_{t=1,\dots T_{sim}} v(t) \tag{5.2}$$

kde T_{sim} je počet kroků simulace.

Ztrátová funkce tvaru sumy je vhodná pro trvalé akční zásahy například při kompenzaci poruchy.

Pokud budeme hodnotit vstupy v systému, který reaguje například na skok, bude vhodné počítat maximum z dílčích funkcí v, protože skok je proveden v jednom kroku a vstupy se ustálí také rychle. Kdyby byla ztráta dána průměrem, záležela by pak na délce regulace, případně na počtu skoků.

Taková ztrátová funkce může hodnotit například chování výstupů při regulaci s omezovačem, vstupů při regulaci bez tvrdých omezení (jak to udělat v praxi) nebo výstupů na oblasti parametrů s dobrým chováním vstupů

5.4.1 Hodnocení výstupů při regulaci s omezovačem

Přirozený požadavek na regulátor je, aby řízený systém vykazoval minimální odchylku výstupu od požadovaných výstupních hodnot. Omezení vstupu lze jednoduše zajistit vložením omezovacího členu na vstup řízeného systému.

Ztrátu v jednom kroku regulace $v_y(t)$ pro tento případ definujeme jako nějakou vzdálenost výstupu od jeho referenční hodnoty

$$v_y(t) = \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\|_? \tag{5.3}$$

Použitá norma může být různá, např. průměr nebo maximum z jednotlivých složek výstupu, pokud jich má systém víc.

Celková ztráta V_y závisí na těchto dílčích ztrátách v_y jedním ze způsobů 5.1 nebo 5.2.

Globální minimum funkce V_y je v bodě, který odpovídá parametrům nejlepšího regulátoru.

Ačkoli je tento přístup k hodnocení regulátoru velmi objektivní, má i své vážné nedostatky. Například při velmi přísných omezeních se bude vstup pohybovat téměř vždy na hranici povolené oblasti, omezení budou skoro vždy aktivní. Tím se ovšem ztratí hladkost průběhu regulace, a tak se dostaví stejný problém jako u GPC regulátorů, nebude možné určit asymptotické vlastnosti regulační smyčky.

5.4.2 Hodnocení vstupů při regulaci bez omezení

Dodržení vstupních omezení lze dosáhnout i jinak než pouhým zapojením omezovacího členu. Budeme hledat takové parametry regulátoru při kterých bude vstup co nejméně porušovat omezení. Vlastnost výstupu necháme zatím stranou.

Jak to provést na reálném systému?

Hodnotí se pouze vstupy podle míry překročení vstupních omezení. Obvod regulace je bez omezovacího členu. Chování výstupů se nehodnotí.

Jak ve skutečnosti neomezovat?

Jednou z možností je počítat ztrátovou funkci jako součet dílčích ztrátových funkcí jednotlivý kroků regulace. Každá taková dílčí funkce bude vyjádřena nějakým druhem vzdálenosti aktuálního vstupu od množiny dané vstupními omezeními.

Skutečná ztrátová funkce bude mít jistou toleranci pro porušení vstupů. Například pokud do systému vstupuje šum, není možné vyloučit, že k překročení omezení někdy stejně dojde, a proto je tato tolerance potřebná.

Od sumy dílčích ztrátových funkcí bude tato tolerance odečtena, výsledek označíme V_u. Znaménko V_u rozděluje parametrický prostor na dvě části. Oblast, ve které je záporné obsahuje regulátory, které vedou k dodržení vstupních omezení v dané toleranci nebo lépe. V místech s kladným znaménkem funkce V_u jsou omezení dodržována nedostatečně.

Funkce V_u pro hodnocení porušení vstupních omezení $\mathcal{U}$ bude tvaru

$$V_u = \sum_{t=1}^{t=T_{sim}} v_u(t) - u_{tol}$$

nebo

$$V_u = \max_{t=1,\dots T_{sim}} v_u(t) - u_{tol}$$

kde u_{tol} je tolerance pro porušení vstupních omezení a v_u je

$$v_u(t) = \varrho(\mathbf{u}(t), \mathcal{U})$$

kde ϱ je nějaká vzdálenost. Pokud jsou omezení nezávislá, viz. (4.1), může být, podobně jako v předchozí sekci, dána průměrem nebo maximem z odchylek jednotlivých složek od povolené oblasti. Přitom každá složka odchylky je ještě normalizovaná podle velikosti příslušného omezení.

S použitím značení z (4.1) může ztrátová funkce mít následující tvar

$$v_u(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} \varrho(u^i(t), \langle u^i_{min}, u^i_{max} \rangle)}{n_u}$$

ϱ je v tomto případě obyčejná vzdálenost na reálných číslech.

Cílem je najít regulátor náležící do oblasti, na které je V_u menší nebo rovno nule. Vlastnost výstupu je nejlepší, když mají vstupy co největší volnost a se zvětšujícími parametry se tlumí vstupy. Proto bude regulátor mít parametry v místech, kde se obě oblasti dotýkají, tedy tam, kde je V_u nulová.

lépe

Oblast kde je funkce V_u nulová, však nebude jen pod, ale nějaká nadplocha v parametrickém prostoru. Lze tedy na ní dále vybírat.

Abychom mohli formálně mluvit o ztrátové funkci, je nutno brát absolutní hodnotu této funkce $\|V_u\|$, protože ztrátová funkce se vždy minimalizuje.

Modifikace pro realizovatelnost Ve skutečnosti není možné řídit systém mimo povolené vstupy, protože by se mohl prostě zničit. Předpokládám, že vstupní omezení jsou maximální přípustné.

Řešením je použít omezovač vždy, ale pro výpočet použít velikost vstupu před omezovačem, nebo-li ztráta vstupu V_u bude součet rozdílů hodnot před a za omezovačem.

5.4.3 Hodnocení výstupů při regulaci bez omezení

V předchozí sekci bylo uvedeno, že optimální regulátor ve smyslu vstupních omezení leží na jisté nadploše. Nyní se soustředíme na vybírání z nejlepšího regulátoru z této nadplochy.

Nejvhodnější kritérium pro výběr bude jistě chování výstupů ve smyslu odchylky od žádané trajektorie. Na nadploše budeme minimalizovat ztrátovou funkci V_y ze sekce 5.4.1.

Nyní se nemusíme omezovat jen na nadplochu, ale přípustné řešení je z celé části prostoru, kde V_u je záporná nebo nulová.

V předchozí sekci byla hranice vybrána jen proto, že tam předpokládáme nejlepší řízení výstupů. Teď však budou optimalizovány přímo.

Z optimalizačního hlediska hledáme minimální V_y při omezení $V_u \leq 0$.

5.5 Pravděpodobnostní hodnocení regulátoru

Chtělo by to znát rozdělení ztrátové funkce V jako náhodné veličiny. Použití dlouhé doby simulace to však částečně kompenzuje. Nicméně se najde jen střední hodnota a ne rozdělení.

Bylo by jistě užitečné zaručit, že např. z 90% budou vstupy dobré. A na to je nutné rozdělení znát. (viz. "Výzkumný úkol")

Kapitola 6

Metody optimalizace

simplex search
quasi-newton
SQP
největší spád

Kapitola 7

Realizace v Matlabu *

(NENÍ ÚPLNĚ AKTUÁLNÍ)

Kapitola 8

Simulované pokusy

V této kapitole jsou uvedeny různé pokusy, které ilustrují možnosti optimalizace LQ regulátoru včetně výpočetní náročnosti.

8.1 Spojené nádoby

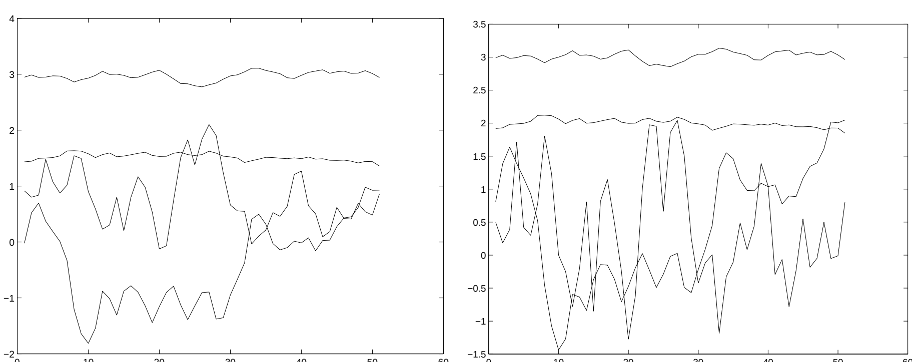
Systém spojených nádob.

Nejprve byla provedena minimalizace pouze výstupu, viz sekce 5.4.2. Výchozí bod byl počátek.

z = -2.1618e-005 zm = 0.0410

Hodnota funkce $V_u = -2.1618e - 005$, čili omezení vstupu je splněno právě v toleranci.

Našlo se nějaké lokální minimum, ne optimální vůči výstupům. Chování výstupů je $V_y = 0.0410$, tj. výstupy se odchylují poměrně hodně. Průběh regulace je na obrázku 8.1 první zleva.



Obrázek 8.1: Průběh regulace před a po použítí funcke fmincon

Výsledky minimalizace Vu a pak omezené minimalizace Vy (obr. 8.1). Z obrázku je vidět, že vázaná minimalizace má smysl. Pro případ normované ztrátové funkce, byl rozdíl podobný. Z tohoto obrázku má vázaná minimalizace význam pro eliminaci konstantní odchylky řízení.

Minimalizace podle křížových kritérií, se ukázala naprosto zbytečná. Dokonce se při ní mimodiagonální prvky vůbec neodchýlily od startovní nuly.
—TO JE CHYBA V PROGRAMU —

Kapitola 9

Závěr